на правах рукописи

САДОВ Алексей Павлович

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОГО НЕВЯЗКОГО ГАЗА

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена в Уральском государственном университете путей сообщения на кафедре "Прикладная математика".

Научный руководитель:
–доктор физико-математических наук, профессор Дерябин С.Л.

Официальные оппоненты:
–доктор физико-математических наук, профессор Филимонов А.М.
(Московский Государственный Университет Путей Сообщения(МИИТ))
–кандидат физико-математических наук Козырев О.М.
(Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский Научно – Исследовательский Институт Технической Физики)

Ведущая организация:
Уральский государственный университет им. А.М. Горького

Защита состоится 2008 года в , ауд. на заседании диссертационного совета Д 218.005.10 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Московском государственном университете путей сообщения (127994, ГСП-4, г.Москва, ул. Образцова, д.15)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного университета путей сообщения

Автореферат разослан 2008 года.
Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат технических наук, профессор Соловьев В.П.

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена применению математического моделирования и численных методов для исследования проблемы сильного сжатия сплошных сред при учете влияния дополнительных физических эффектов, характерных для среды с большими значениями плотности и температуры: равновесного излучения и комптоновского механизма рассеивания фотонов – с помощью *бегущих и тепловых* волн.

Актуальность темы. Исследование явлений неограниченной кумуляции энергии актуально в связи с различными приложениями в науке и технике. Одной из задач, связанных с эффектом неограниченной кумуляции, является управляемый термоядерный синтез, описанный, например, в книге Е.И. Забабахина, И.Е. Забабахина [1]. При термоядерном лазерном синтезе для инициирования термоядерных процессов необходимо получить очень большие значения плотности и температуры. В подавляющем большинстве физических экспериментов большие значения плотности и температуры получают с помощью ударных нагрузок соответствующих мишеней. С точки зрения минимизации затрат энергии для достижения требуемых значений параметров большой интерес также представляют режимы, при которых осуществляется безударное сжатие вещества. Кроме того, именно режимы безударного сильного сжатия позволяют получить большие значения плотности газа.

В задачах о получении больших значений температуры и плотности для более адекватного описания возникающих течений необходимо учитывать равновесное излучение. Этот физический процесс описан в книгах Е.И. Забабахина, И.Е. Забабахина[1], Я.Б. Зельдовича, Ю.П. Райзера[2]. В реальных физических экспериментах эффекты лучистой теплопроводности проявляются при очень больших значениях температуры нагретого газа. Поэтому в физической и математической литературе при моделировании подобных течений часто полагают температуру фона равной нулю.

Решение задачи сильного сжатия невозможно без математического моделирования, которое позволяет исследовать возникающие процессы без дорогостоящего, а иногда и просто невозможного физического эксперимента. В качестве математической модели, достаточно адекватно описывающей процессы сжатия при учете лучистой теплопроводности для течений с такими свойствами, в том числе, при больших значениях температуры, используется математическая модель теплопроводного невязкого газа.

Математическое моделирование сильного сжатия газа ведется в различ-

[1]Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.

[2]Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.

ных направлениях.

Первое направление математического моделирования сильного сжатия газа состоит в использовании точных решений систем уравнений газовой динамики для политропного газа. Для этого случая наиболее исследованными являются одномерные неустановившиеся течения. Для описания некоторых плоскосимметричных течений газа применяется центрированная волна Римана – классическое решение системы уравнений газовой динамики, обладающее особенностью

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U}\left(\frac{x_1 - x_1^*}{t - t_*}\right), \quad t_*, x_1^* - \mathrm{const},$$

где t, x_1 – независимые переменные, вектор $\overrightarrow{U}$ задает параметры течения газа. При $t < t_*$ центрированная волна Римана описывает течение, возникающее при безударном сильном сжатии плоского слоя в идеальном газе, что описано в работе К.П. Станюковича. Е.И. Забабахиным, И.Е. Забабахиным[1] указано, что впервые центрированная волна Римана применена Гюгонио и Релеем для описания сжатия плоского слоя газа до сколь угодно большой плотности. В случае цилиндрически- и сферически-симметричных течений особенностью, аналогичной особенности в центрированной волне Римана, обладают автомодельные решения Л.И. Седова[3], с помощью которых осуществляется описание безударного сильного сжатия первоначально однородного и покоящегося в цилиндре или шаре идеального политропного газа. Интерпретации этих решений для задач о безударном сильном сжатии газа посвящены работы Я.М. Каждана, И.Е. Забабахина, В.А. Симоненко, А.Н. Крайко.

Точные автомодельные решения задачи об истечении газа в вакуум для двумерных и трехмерных течений были применены А.Ф. Сидоровым[4] для описания безударного сильного сжатия до бесконечной плотности газа, который в начальный момент покоится внутри призмы или многогранника при согласованных значениях показателя политропы газа γ и двугранных углов.

Второе направление математического моделирования безударного сильного сжатия газа связано с приближенными аналитическими, численными и комбинированными численно-аналитическими методами. Г.В. Долголевой, А.В. Забродиным [5] для течений с плоской, цилиндрической и сферической симметрией рассмотрена задача о достижении больших степеней сжатия по плотности и требуемого нагрева при минимально необходимом вложении

[3]Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

[4]Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

[5]Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия. М.: Физматлит, 2004.

энергии для зажигания термоядерной микромишени оболочечной структуры. Для этой задачи указан способ построения оболочечных систем и установлена зависимость вложения энергии от времени, реализация которой позволяет воспроизвести в средней части мишени необходимые для начала термоядерной реакции значения параметров среды. Эти значения, в том числе, скорости и плотности газа, согласованы между собой в соответствии со связью между газодинамическими параметрами, имеющей место в центрированной волне Римана.

В монографии С.П. Баутина[6] предложен и в последующем развит (см. монографию Баутина С.П. [7]) единый подход к математическому моделированию сильного сжатия газа. Прошедшее с 1997 года десятилетие показало эффективность предложенного подхода. При этом подходе сначала ставятся начально-краевые задачи, описывающие процесс безударного сильного сжатия произвольного, локально-аналитического фонового течения на произвольной локально-аналитической поверхности. Для поставленных начально-краевых задач доказываются теоремы существования и единственности аналитических и кусочно-аналитических решений. Исследуются свойства решений, в том числе, устанавливаются асимптотические законы поведения газодинамических параметров при неограниченном росте плотности. С использованием строго полученных математических свойств исследуемых процессов далее численно и аналитически решаются конкретные задачи, моделирующие процессы сильного сжатия газа, в том числе, для специальных конфигураций сжимаемых объемов, используемых в физических экспериментах, а также при учете дополнительных физических факторов (излучение, теплопроводность) и реальных уравнений состояния. Многие полученные ранее точные решения, в том числе, центрированная волна Римана вкладываются в решения, найденные с использованием методики С.П. Баутина[6,7], как частные случаи, при которых обрываются соответствующие ряды и получаются конечные формулы. Этот подход получил дальнейшее развитие при математическом моделировании течений газа в работах С.П. Баутина и его учеников: С.Л. Дерябина, А.Л. Казакова, Ю.В. Николаева, А.В. Рощупкина, Ю.Ю. Чернышова, С.А. Ягупова и автора. В том числе, С.П. Баутиным совместно с С.Л. Дерябиным при $t \geq t_*$ рассмотрено одно- и двумерное истечение газа в вакуум в различных ситуациях, в том числе и в случае произвольного уравнения состояния $p = \rho^\gamma f(\rho, S)$ с аналитической функцией f. Обобщение центрированной волны на случай уравнения состояния в виде $p = p(\rho, e)$ принадлежит

[6]Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. – Новосибирск: Наука, 1997. – 160 с.

[7]Баутин С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа.– Новосибирск: Наука, 2007.–312 с.

С.П. Баутину. С.А. Ягуповым построены течения, обобщающие свойства центрированной волны Римана на случай изэнтропических течений водорода с реальной изэнтропой, полученных в физических экспериментах. Ю.В. Николаевым при решении различных задач численно построены обобщения центрированной волны в цилиндрически- и сферически-симметричных случаях, описывающие безударное сжатие газа до плотностей, в десятки-сотни тысяч раз превышающих исходную плотность однородного покоящегося газа. А.В. Рощупкиным рассчитаны двумерные течения с соответствующей особенностью до плотностей, в 6–8 раз превышающих исходную плотность однородного покоящегося газа. Естественно, такие степени сжатия недостаточны для моделирования требуемого в экспериментах сильного сжатия газа. Тем не менее рассчитанные степени двумерного сжатия больше, чем в бесконечно сильной ударной волне.

Влияние лучистой теплопроводности на процесс кумуляции плоского слоя газа численно было исследовано М.Г. Анучиным [8] с использованием комплекса программ "Тигр".

Математическое моделирование тепловых волн проводилось многими авторами. Для нелинейного уравнения теплопроводности Г.И. Баренблатом впервые были приведены примеры тепловых волн, распространяющихся по холодной среде с конечной скоростью, то есть сжимаемость среды и ее движение не учитывалось. Применение методологии характеристических рядов к построению тепловых волн было предложено А.Ф. Сидоровым[4], в частности, в одномерном плоскосимметричном случае доказано существование и единственность аналитического решения при специальном виде фронта тепловой волны. С.П. Баутиным[9] доказано существование и единственность аналитической тепловой волны у нелинейного уравнения теплопроводности как при задании аналитического фронта тепловой волны, так и при задании краевого температурного режима. С.П. Баутиным и А.А. Елисеевым доказаны существование и единственность аналитического решения у нелинейного уравнения теплопроводности в многомерном случае при заданном произвольном аналитическом краевом режиме с отличной от нуля в момент $t = 0$ производной по времени. С.С. Титовым при рациональных значениях константы σ, являющейся показателем степени в нелинейном коэффициенте теплопроводности, в плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричных случаях в виде специальных рядов построены решения задачи о тепловой волне с заданным фронтом, обладающие на фронте тепловой волны конкретными особенностями.

[8] Анучин М.Г. Влияние теплопроводности на неограниченное безударное сжатие плоского газового слоя // Прикладная механика и техническая физика. – 1998.–Т. 39, №4.–С. 25–32.

[9] Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003

С.С. Титовым приведены примеры точных решений нелинейного уравнения теплопроводности в виде специальных многочленов. С.С. Титовым также получены решения нелинейного уравнения теплопроводности для симметричного случая в виде сходящихся логарифмических рядов. С.П. Курдюмовым в автомодельном виде построено плоскосимметричное течение теплопроводного невязкого газа, в котором тепловая волна распространяется по холодной среде с конечной скоростью по фону, имеющему строго положительную температуру. Более общее течение теплопроводного невязкого газа с аналогичным свойством построено С.П. Баутиным[7]. Также С.П. Баутиным построены тепловые волны, распространяющиеся в теплопроводном вязком газе при задании фронта их движения в случае, когда показатель степени температуры в коэффициенте теплопроводности равен единице. Аналог центрированной волны Римана в теплопроводном невязком газе описан в одномерном случае С.П. Баутиным и Ю.Ю. Чернышовым, в двумерном – Ю.Ю. Чернышовым. Для идеального теплопроводного газа в случае холодного фона ($T_0 = 0$) Е.И. Забабахиным и В.А. Симоненко показано, что в бесконечно сильной волне реализуется течение с изотермическим скачком. В случае $T_0 > 0$ в работах Я.Б. Зельдовича и Ю.П. Райзера[2], Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, Б.Л. Рождественского и Н.Н. Яненко[10] установлено, что при малых значениях скорости D движения бегущей волны имеет место непрерывный переход, а при больших D – изотермический скачок. Бегущие волны в теплопроводном газе с уравнениями состояния, учитывающими равновесное излучение, были ранее рассмотрены для холодного фона с $T_0 = 0$ в работах В.А. Белоконя и в уже упомянутой книге[2]. Также найдены два режима: при малых D изотермический скачок, при больших D – непрерывный переход.

Метод исследования. В диссертации использованы численные и аналитические методы исследования начальных и краевых задач для нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными, решения которой описывают плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричные нестационарные течения теплопроводного невязкого газа. Учет теплопроводности приводит к тому, что рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет смешанный тип – уравнение энергии является уравнением параболического типа, а уравнения неразрывности и импульса образуют гиперболическую часть системы.

В диссертации решения начальных и краевых задач строятся в виде сходящихся рядов, для которых исследуется область сходимости и доказана возможность применения построенных рядов для приближенного описания течений в окрестности фронта тепловой волны. Начальные отрезки этих рядов используются для приближенного описания возникающих одномерных тепловых волн во всей рассматриваемой области.

Для моделирования плоских тепловых волн используется один частный класс решений рассматриваемой системы уравнений с частными производными: бегущие как по холодному, так и по нехолодному фону волны, то есть решения, зависящие от одной независимой переменной

$$z = x - D \cdot t,$$

у которых константа D задает скорость движения бегущей волны и, не нарушая общности, полагается $D > 0$, то есть бегущая волна движется слева направо. Исследование этого класса течений осуществляется с помощью численного построения решений соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ).

Целями работы являются:

1. Доказательство существования плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричных тепловых волн при учете равновесного излучения с использованием математической модели теплопроводного невязкого газа в окрестности фронта тепловой волны. Доказательство проведено в двух случаях: 1.1) когда задан аналитический закон движения фронта тепловой волны; 1.2) когда задан аналитический краевой температурный режим на некоторой аналитической поверхности.

2. Моделирование плоскосимметричных течений с помощью бегущих волн, распространяющихся как по холодному, так и по нехолодному фону.

3. Получение закона движения сжимающего поршня и распределения значений параметров газа на нем с помощью аналитических представлений тепловых волн. А также получение краевого температурного режима в заданной точке физического пространства, а также значений плотности и скорости газа в этой точке.

4. Приближенное построение полей течений во всей рассматриваемой области: от сжимающего поршня до фронта тепловой волны; от точки краевого температурного режима до фронта тепловой волны.

Научная новизна работы заключается в следующем.

С использованием аналитического подхода математически смоделированы ранее не исследовавшиеся плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричные течения газа с учетом равновесного излучения.

Впервые строго математически доказано существование тепловых волн, распространяющихся по холодному теплопроводному невязкому газу, когда коэффициент теплопроводности $\kappa = \kappa_0 T^3/\rho$ пропорционален третьей степени температуры, и впервые строго математически раскрыта особенность на фронте тепловой волны.

Впервые построены распространяющиеся по нехолодному фону плоские бегущие волны, обладающие тремя режимами, в том числе, с изотермическими скачками.

Теоретическая ценность работы состоит в следующем.

Учет реальных уравнений состояния привел к математической модели, имеющей сильное вырождение в окрестности фронта тепловой волны. Для раскрытия особенности была применена вырожденная замена переменной и получена система нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, не имеющая особенностей. Для этой системы поставлены начально-краевые задачи, для которых доказаны теоремы существования и единственности решений в специальных функциональных пространствах.

Это позволило в виде бесконечных сходящихся рядов построить локально-аналитические тепловые волны как при заданном фронте тепловой волны, так и при специально подобранном краевом температурном режиме. Оба эти класса волн являются аналитическими в окрестности фронта и, тем самым, в физическом пространстве описана и раскрыта имеющаяся особенность. Показано, что, несмотря на наличие бесконечного градиента температуры на фронте тепловой волны, тепловой поток на нем непрерывен: равен нулю с обеих сторон фронта тепловой волны.

С помощью конечных отрезков рядов смоделированы тепловые волны с заранее заданным фронтом.

Численными расчетами бегущих волн получены решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которые сравнивались с приближенными решениями, полученными с помощью конечных отрезков сходящихся рядов.

С помощью численных расчетов системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) построены плоские бегущие волны, распространяющиеся по нехолодному фону и передающие такие течения теплопроводного невязкого газа, которые возникают при ударном воздействии на газ. В зависимости от скорости распространения фронта бегущей волны выделены три режима. В первом случае, когда указанная скорость невелика, переход от одних постоянных значений параметров газа к другим постоянным значениям по разные стороны от фронта бегущей волны осуществляется непрерывно. С увеличением скорости движения бегущей волны возникает изотермический скачок: плотность и скорость газа претерпевают сильный разрыв, а температура меняется непрерывно. При дальнейшем увеличении скорости бегущей волны изотермический скачок исчезает и течение газа снова становится непрерывным.

Практическая ценность работы состоит в том, что найденные решения моделируют важные для физических экспериментов течения, возникающие как при ударном, так и при безударном сильном сжатии теплопроводного невязкого газа. Построенные решения могут быть использованы для тестирования численных методик в окрестности особой точки – фронта тепловой волны.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. С помощью специальной вырожденной замены переменных, навязанной видом коэффициента теплопроводности, получена система нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, описывающая плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричные течения теплопроводного невязкого газа, соответствующее дифференциальное следствие которой не имеет особенности на фронте тепловой волны.

2. В виде бесконечных рядов построены плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричные тепловые волны в теплопроводном невязком газе в случае задания закона движения фронта по холодному газу и доказана сходимость этих рядов. Это позволило описать и раскрыть особенность решений исходной системы на фронте тепловой волны. При этом тепловой поток на фронте непрерывен – равен нулю с обеих сторон.

Использование одного частного класса решений – бегущие по холодному фону волны – позволило уточнить области сходимости построенных рядов с помощью численного решения соответствующей СОДУ.

3. В виде бесконечных сходящихся рядов, передающих особенность на фронте, построены плоскосимметричные тепловые волны в теплопроводном невязком газе в случае специально подобранного краевого температурного режима.

4. В виде бегущих волн численными расчетами решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений смоделирована тепловая волна, идущая по нехолодному фону. Расчетами установлены значения констант D_0, D_1, D_2 и наличие трех режимов распространения фронта бегущей волны в зависимости от величины D – скорости движения бегущей волны: при $D_0 < D \leq D_1$ – непрерывный переход; при $D_1 < D < D_2$ – изотермический скачок; при $D_2 \leq D$ снова непрерывный переход.

5. С помощью всех построенных численными методами решений приближенно восстанавливаются: закон движения сжимающего поршня, порождающего заданную тепловую волну; краевой температурный режим в заданной точке физического пространства; параметры течения газа во всей рассматриваемой области.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 2006 г.;

Международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", посвященная 105-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева, Новосибирск, ИгИЛ, СО РАН, 2005 г.;

Международная конференция "VII Забабахинские научные чтения", Снежинск, РФЯЦ–ВНИИТФ, 2005 г.;

Международная конференция "VIII Забабахинские научные чтения", Снежинск, РФЯЦ–ВНИИТФ, 2007 г.;

21-ая Всероссийская конференция "Аналитические методы в газовой динамике САМГАД-2006", ИгИЛ СО РАН, ИПМ РАН, Санкт-Петербург, 2006 г.;

37-ая региональная молодежная конференция "Проблемы теоретической и прикладной математики", Екатеринбург, УрО РАН, 2006 г.;

Международная научная конференция "Устойчивость, управление и моделирование динамических систем", посвященная 75-летию со дня рождения И.Я. Каца, Екатеринбург, УрГУПС, 2006 г.;

Международная научно-практическая конференция "Снежинск и наука – 2006. Трансфер технологии, инновации, современные проблемы атомной отрасли", Снежинск, СГФТА, 2006 г.;

Молодежная научно-практическая конференция "Молодые ученые – транспорту", Екатеринбург, УрГУПС, 2006 г.;

Молодежная научно-практическая конференция "Молодые ученые – транспорту", Екатеринбург, УрГУПС, 2007 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ [1–14]. Из них – восемь в виде статей [1–8] (в том числе, две – в журналах из списка ВАК [1–2]), шесть в виде тезисов. Результаты докладывались на десяти научных конференциях.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, восьми параграфов, заключения, приложений, в которые вынесены аналитические выкладки, а также графики и таблицы массовых расчетов значений газодинамических параметров, и списка литературы. Объем диссертации составляет 141 страницу машинописного текста, включая 137 рисунков и 92 библиографические ссылки.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обзор современного состояния исследуемой проблемы и краткое изложение основных результатов работы.

В **главе 1** рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, решения которой описывают плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричные течения теплопроводного невязкого газа. Построены одномерные тепловые волны в невязком газе в случае задания закона движения фронта тепловой волны по холодному однородному покоящемуся газу: $x = a(t)$ в случае $\nu = 0$ и $r = a(t)$, где $r = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\nu+1} x_i^2}$. в случае $\nu = 1, 2$. Также построены тепловые волны, когда прогрев среды осуществляется на некоторой, движущейся за фронтом тепловой волны, поверхности. Законы движения нагреваемой поверхности и фронта волны заранее согласованы и определяются в процессе построения решения задачи. Во всех рассмотренных задачах с помощью конкретной вырожденной замены переменных делается переход в специальное функциональное пространство, в котором решаемые задачи не имеют особенности на фронте тепловой волны. Доказано существование аналитического решения в окрестности фронта тепловой волны, которая конструктивно построена в виде сходящихся бесконечных рядов в специальном функциональном пространстве. Во всех задачах этой главы показано, что: 1) в физическом пространстве на фронте тепловой волны постоянно имеется особенность типа бесконечного градиента у газодинамических параметров; 2) тепловой поток на фронте волны непрерывен – равен нулю с обеих сторон; 3) рассматриваемое течение есть волна сжатия.

Глава содержит три параграфа.

В **параграфе 1.1** исследуются плоскосимметричные тепловые волны в теплопроводном невязком газе, уравнения состояния которого из-за учета равновесного излучения имеют следующий вид

$$p = R\rho T + \frac{1}{3}\sigma T^4 \ , \quad e = c_v T + \sigma \frac{T^4}{\rho} \ ; \quad \sigma = \mathrm{const} > 0. \tag{1}$$

Здесь: p – давление; ρ – плотность; T – температура; e – внутренняя энергия; R – газовая постоянная; σ – константа, связанная с постоянной Стефана-Больцмана σ_* соотношением $\sigma = 4\sigma_*/c_*$; c_* – скорость света в вакууме; c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Коэффициент лучистой теплопроводности такой

$$\kappa = 2\frac{\sigma c_* \alpha_*}{(\gamma - 1)} \frac{T^3}{\rho} \ , \tag{2}$$

где α_* – положительная константа, зависящая от выбора системы единиц, $\gamma - 1 = R/c_v > 0$ – показатель политропы идеального газа.

В этом случае система уравнений газовой динамики, описывающая плоскосимметричные течения теплопроводного невязкого газа при учете равновесного излучения в безразмерных переменных имеет следующий вид

$$
\begin{cases}
\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\
u_t + uu_x + \dfrac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_x + \left(\rho + \sigma_1 T^3\right)T_x\right] = 0, \\
\left(\rho + \sigma_2 T^3\right)\left(T_t + uT_x\right) + (\gamma - 1)T\left(\rho + \sigma_1 T^3\right)u_x = \kappa_0 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{T^3}{\rho}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right).
\end{cases}
\tag{3}
$$

В этой системе: t – время; x – пространственная координата; u – скорость газа;

$$
\sigma_1 = \frac{4}{3}\sigma\frac{T_{00}^3}{R\rho_{00}}; \quad \sigma_2 = 3(\gamma - 1)\sigma_1; \quad \kappa_0 = \frac{2\sigma c_* \alpha_* T_{00}^3}{Ru_{00}\rho_{00}^2 x_{00}},
$$

где $\rho_{00}, u_{00}, T_{00}, x_{00}$ – постоянные величины, используемые при введении безразмерных переменных. Искомая тепловая волна непрерывно премыкает к однородному холодному покоящемуся газу со следующими значениями параметров

$$
\rho(x,t)|_{x=a(t)} = 1, \quad u(x,t)|_{x=a(t)} = 0, \quad T(x,t)|_{x=a(t)} = 0. \tag{4}
$$

Это состояние газа далее называется фоновым течением.

Некоторая заданная аналитическая в окрестности $t = 0$ функция $a(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$
a'(0) \neq 0, \tag{5}
$$

определяет фронт тепловой волны в виде $x = a(t)$. На этом фронте тепловая волна с $T > 0$ непрерывным образом стыкуется с фоновым течением.

Делается замена независимых переменных

$$
\begin{cases}
z = x - a(t), \\
\tau = t,
\end{cases}
\tag{6}
$$

то есть фронт тепловой волны берется за новую координатную ось $z = 0$. В получившейся задаче при $z = 0$ имеется особенность: в третьем уравнении системы коэффициент перед старшей производной равен нулю. Это приводит к тому, что на фронте тепловой волны возникает бесконечный градиент. Для описания и раскрытия этой особенности на фронте тепловой волны делается новая замена независимых переменных

$$
\begin{cases}
\xi = \sqrt[3]{z}, \\
\tau' = \tau.
\end{cases}
\tag{7}
$$

При заменах (6), (7) система (3) переходит в систему

$$\begin{cases} 3\xi^2\rho_\tau + (u - a'(\tau))\,\rho_\xi + \rho u_\xi = 0, \\ 3\xi^2 u_\tau + (u - a'(\tau))\,u_\xi + \dfrac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_\xi + \left(\rho + \sigma_1 T^3\right)T_\xi\right] = 0, \\ 3\xi^3\left(\rho + \sigma_2 T^3\right)\left(3\xi^2 T_\tau + \left[u - a'(\tau)\right]T_\xi\right) + 3\xi^3(\gamma-1)T\left(\rho + \sigma_1 T^3\right)u_\xi = \\ = \kappa_0\left[\xi\dfrac{T^3}{\rho}T_{\xi\xi} - \dfrac{2T^3}{\rho}T_\xi - \xi\dfrac{T^3}{\rho^2}T_\xi\rho_\xi + \xi\dfrac{3T^2}{\rho}T_\xi^2\right]. \end{cases} \tag{8}$$

Условия (4) при заменах (6), (7) переходят в условия

$$\rho(\tau,\xi)|_{\xi=0} = 1, \quad u(\tau,\xi)|_{\xi=0} = 0, \quad T(\tau,\xi)|_{\xi=0} = 0. \tag{9}$$

Решение задачи (8), (9) представляется в виде ряда по степеням ξ

$$\mathbf{W}(\tau,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{W}_k(\tau)\,\frac{\xi^k}{k!}, \quad \mathbf{W}_k(\tau) = \left.\frac{\partial^k\mathbf{W}}{\partial\xi^k}\right|_{\xi=0}, \quad \mathbf{W} = (\rho, u, T). \tag{10}$$

Доказано, что коэффициенты ряда (10) однозначно определяются по заданной функции $a(t)$ последовательным исключением из конкретных систем линейных алгебраических уравнений. Доказано, что эти коэффициенты являются аналитическими функциями.

Сходимость ряда (10) доказана методом мажорант.

В **параграфе 1.2** рассматривается задача о моделировании цилиндрически- ($\nu = 1$) и сферически-симметричных ($\nu = 2$) тепловых волн, распространяющихся по холодному однородному покоящемуся газу при условии задания закона движения фронта в окрестности точки, имеющей ненулевой радиус: $r = a(t)$, $a(0) = r_0 > 0$, $r = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\nu+1} x_i^2}$, $\nu = 1, 2$.

Система уравнений газовой динамики в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_r + \rho\left(u_r + \nu\dfrac{u}{r}\right) = 0, \\ u_t + uu_r + \dfrac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_r + \left(\rho + \sigma_1 T^3\right)T_r\right] = 0, \\ \left(\rho + \sigma_2 T^3\right)\left(T_t + uT_r\right) + (\gamma-1)T\left(\rho + \sigma_1 T^3\right)\left(u_r + \nu\dfrac{u}{r}\right) = \\ = \kappa_0\left[\dfrac{T^3}{\rho}T_{rr} + \dfrac{3T^2}{\rho}T_r^2 - \dfrac{T^3}{\rho^2}T_r\rho_r + \dfrac{\nu}{r}\dfrac{T^3}{\rho}T_r\right] \end{cases} \tag{11}$$

Искомая тепловая волна также непрерывно стыкуется с фоновым течением (см. рис. 1):

$$\rho(r,t)|_{r=a(t)} = 1, \quad u(r,t)|_{r=a(t)} = 0, \quad T(r,t)|_{r=a(t)} = 0. \tag{12}$$

Рис. 1

Для решения задачи (11)–(12) делаются замены (6)–(7), где вместо переменной x берется переменная r. В результате этих замен задача (11)–(12) переходит в задачу

$$\begin{cases} 3\xi^2\rho_\tau\left[\xi^3+a(\tau)\right]+\left[\xi^3+a(\tau)\right]\left[u-a'(\tau)\right]\rho_\xi+ \\ +\rho\left[u_\xi\left(\xi^3+a(\tau)\right)+3\xi^2\nu u\right]=0, \\ \\ 3\xi^2u_\tau+\left(u-a'(\tau)\right)u_\xi+\dfrac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_\xi+\left(\rho+\sigma_1T^3\right)T_\xi\right]=0, \\ \\ 3\xi^3\rho^2\left(\xi^3+a(\tau)\right)\left(\rho+\sigma_2T^3\right)\left(3\xi^2T_\tau+\left[u-a'(\tau)\right]T_\xi\right)+ \\ +3\xi^3\rho^2(\gamma-1)T\left(\rho+\sigma_1T^3\right)\left[u_\xi\left(\xi^3+a(\tau)\right)+3\xi^2\nu u\right]= \\ =\kappa_0\left[\left(\xi^3+a(\tau)\right)\xi\rho T^3T_{\xi\xi}-\left(\xi^3+a(\tau)\right)2\rho T^3T_\xi+\right. \\ \left.+\left(\xi^3+a(\tau)\right)3\rho\xi T^2T_\xi^2-\left(\xi^3+a(\tau)\right)\xi T^3T_\xi\rho_\xi+3\xi^3\rho\nu T^3T_\xi\right]. \end{cases} \tag{13}$$

$$\rho(\tau,\xi)|_{\xi=0} = 1, \quad u(\tau,\xi)|_{\xi=0} = 0, \quad T(\tau,\xi)|_{\xi=0} = 0. \tag{14}$$

Решение задачи (13), (14) представляется в виде ряда по степеням ξ

$$\mathbf{W}(\tau,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{W}_k(\tau)\frac{\xi^k}{k!}, \quad \mathbf{W}=(\rho,u,T), \tag{15}$$

где $\mathbf{W}_k(\tau) = \left.\dfrac{\partial^k\mathbf{W}}{\partial\xi^k}\right|_{\xi=0}$ – значения производных, выводящих с фронта тепловой волны.

В диссертации доказано, что формальный ряд (15), решающий задачу (13)–(14), строится однозначно и его коэффициенты являются аналитическими функциями от τ. Сходимость ряда (15) доказана методом мажорант.

В **параграфе 1.3** рассматривается задача о построении плоскосимметричной тепловой волны при специально заданном краевом температурном режиме. Тепловая волна, распространяющаяся по холодному однородному покоящемуся газу, строится в случае, когда прогрев среды осуществляется на движущейся за фронтом волны поверхности $x = b(t)$ по заданному закону

$$T(t,x)|_{x=b(t)} = f(t), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = f_1 > 0. \tag{16}$$

При этом, по заданной функции $f(t)$ законы движения нагреваемой поверхности $x = b(t)$ и фронта $x = a(t)$ определяются в процессе построения решения задачи. Таким образом, решается задача (16), (17), (18)

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ u_t + uu_x + \dfrac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_x + \left(\rho + \sigma_1 T^3\right) T_x\right] = 0, \\ \left(\rho + \sigma_2 T^3\right)\left(T_t + uT_x\right) + (\gamma-1)T\left(\rho + \sigma_1 T^3\right) u_x = \kappa_0 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{T^3}{\rho}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{17}$$

$$\rho(x,t)|_{x=a(t)} = 1, \quad u(x,t)|_{x=a(t)} = 0, \quad T(x,t)|_{x=a(t)} = 0, \tag{18}$$

с неизвестными пока функциями $a(t)$, $b(t)$.

Далее делаются замены переменных вида (6)–(7) и система (17) переходит в систему

$$3\xi^2\rho_\tau + \left(u - a'(\tau)\right)\rho_\xi + \rho u_\xi = 0, \tag{19}$$

$$3\xi^2 u_\tau + \left(u - a'(\tau)\right) u_\xi + \frac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_\xi + \left(\rho + \sigma_1 T^3\right) T_\xi\right] = 0,$$

$$3\xi^3\left(\rho + \sigma_2 T^3\right)\left(3\xi^2 T_\tau + \left[u - a'(\tau)\right] T_\xi\right) + 3\xi^3(\gamma-1)T\left(\rho + \sigma_1 T^3\right) u_\xi =$$

$$= \kappa_0\left[\xi\frac{T^3}{\rho}T_{\xi\xi} - \frac{2T^3}{\rho}T_\xi - \xi\frac{T^3}{\rho^2}T_\xi\rho_\xi + \xi\frac{3T^2}{\rho}T_\xi^2\right],$$

Условия (18), (16) при заменах (6)–(7) переходят в условия

$$\rho(\tau,\xi)|_{\xi=0} = 1, \quad u(\tau,\xi)|_{\xi=0} = 0, \quad T(\tau,\xi)|_{\xi=0} = 0. \tag{20}$$

$$T(t,\xi)|_{\xi=\sqrt[3]{b(t)-a(t)}} = f(t). \tag{21}$$

В силу того, что $a(0) = b(0) = 0$ задача (19)–(21) в точке $t = 0$ имеет особенность, поэтому в дальнейшем полагается, что

$$b(t) = a(t) - a^3(t).$$

Рис. 2

Тогда условия (21) перепишутся в существенно более простом виде, повторяющем вид краевого условия из книги[9]:

$$T(t,\xi)|_{\xi=-a(t)} = f(t). \tag{22}$$

Для построения такой тепловой волны, как и в книге[9], меняются ролями искомая температура T и независимая переменная ξ. В результате задача (16), (17), (18) переходит в задачу

$$3\xi^2\left(\rho_t\xi_T - \xi_t\rho_T\right) + \left[u - a'(t)\right]\rho_T + \rho u_T = 0, \tag{23}$$

$$3\xi^2\left(u_t\xi_T - \xi_t u_T\right) + \left[u - a'(t)\right]u_T + \frac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_T + \left(\rho + \sigma_1 T^3\right)\right] = 0,$$

$$3\xi^3\left(\rho + \sigma_2 T^3\right)\xi_T^2\left(3\xi^2\xi_t - u + a'(t)\right) - 3\xi^3\xi_T^2(\gamma-1)T\left(\rho + \sigma_1 T^3\right)u_T =$$

$$= \kappa_0\left(\xi\frac{T^3}{\rho}\xi_{TT} + \frac{2T^3}{\rho}\xi_T^2 + \xi\frac{T^3}{\rho^2}\xi_T\rho_T - \xi\frac{3T^2}{\rho}\xi_T\right).$$

$$\xi(t,T)|_{T=f(t)} = -a(t), \tag{24}$$

$$\xi(t,T)|_{T=0} = 0, \quad u(t,T)|_{T=0} = 0, \quad \rho(t,T)|_{T=0} = 1. \tag{25}$$

Теорема. *Задача (23)–(25) имеет единственное аналитическое решение.*

Для доказательства теоремы делается еще одна замена переменных

$$v = T; \quad y = T - f(t).$$

Решение строится в виде формальных рядов (26) с аналитическими коэффициентами в виде

$$\mathbf{Z}(y,v) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Z}_k(y)\frac{v^k}{k!}, \quad \mathbf{Z} = (\rho, u, \xi), \quad \mathbf{Z}_k(y) = \frac{\partial^k\mathbf{Z}}{\partial v^k}\Big|_{v=0}. \tag{26}$$

И, наконец, строится мажорантная задача, для которой доказано существование аналитического решения, что, в свою очередь, обеспечивает сходимость построенных рядов (26).

Поскольку соответствующие якобианы отличны от нуля, решение (26) восстанавливается в физическом пространстве с помощью обратных замен при малых t в области между $x = b(t)$ и $x = a(t)$ (см. рис. 2).

В **главе 2** построены бегущие волны, распространяющиеся по нехолодному фону с $T_0 > 0$.

Рассматривается система уравнений газовой динамики и условия Гюгонио для нее в случае теплопроводного невязкого газа, когда коэффициент теплопроводности имеет вид (2) и, следовательно, положителен при $T > 0$. Рассмотрение ведется в случае нестационарных плоскосимметричных течений. Для полноты изложения в диссертации также приведены подробные выкладки, проделанные С.П. Баутиным и показывающие эквивалентность различных видов системы уравнений газовой динамики и условий Гюгонио для рассматриваемого случая теплопроводного невязкого газа. В частности, условия Гюгонио приведены как в традиционно используемом виде[10], так и виде, когда все значения параметров газа за волной выражены как функции от температуры фона и скорости движения волны. Именно этот вид условий Гюгонио используется в диссертации.

Численным построением решений соответствующей СОДУ описываются бегущие волны, распространяющиеся по нехолодному фону с $T_0 > 0$. В рамках одной термодинамической модели в зависимости от D – скорости распространения фронта бегущей волны – выявлены три режима. В первом случае, когда скорость D невелика, переход от постоянных значений параметров газа по разные стороны от фронта бегущей волны осуществляется непрерывно. При увеличении D возникает изотермический скачок: плотность и скорость газа претерпевают сильный разрыв, а температура меняется непрерывно. При дальнейшем увеличении скорости D бегущей волны изотермический скачок исчезает и течение газа снова становится непрерывным. Причем, при неограниченном увеличении D температура и скорость газа также растут неограниченно, а значение плотности газа за бегущей волной стремится снизу к значению $7\rho_0$, где ρ_0 – плотность газа перед бегущей волной. Этот результат совпадает с полученным ранее в работе[2]. Исследован случай, когда температура фона стремится к нулю: $T_0 \to 0$. Показано, что в пределе первый режим исчезает и получаются два режима, ранее описанных в работе[2].

Глава содержит два параграфа.

В **параграфе 2.1** строится математическая модель бегущих волн в теплопроводном невязком газе. Рассматривается система уравнений с част-

[10]Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.

ными производными[10]

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\\[2ex]
\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(p+\rho u^2\right)}{\partial x}=0,\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon+\rho\frac{u^2}{2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)-\kappa\,\dfrac{\partial T}{\partial x}\right]=0,
\end{cases}
\tag{27}
$$

решения которой описывают плоскосимметричные течения теплопроводного невязкого газа.

Далее приводятся система уравнений с частными производными и условия Гюгонио в случае конкретных уравнений состояния (1) и коэффициентом теплопроводности (2). Традиционным образом вводятся безразмерные переменные и получается система уравнений (3), эквивалентная (27).

Для получения СОДУ, описывающей бегущие волны, в системе (3) делается замена переменных

$$\tau=t,\quad z=x-D\cdot t \tag{28}$$

и полагается $\partial/\partial\tau=0$ (штрихом далее обозначена производная по z):

$$
\begin{cases}
(u-D)\rho'+\rho u'=0,\\[2ex]
(u-D)u'+\dfrac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho'+(\rho+\sigma_1T^3)T'\right]=0,\\[2ex]
(\rho+\sigma_2T^3)(u-D)T'+(\gamma-1)(\rho T+\sigma_1T^4)u'=\\[2ex]
=\kappa_0\left(\dfrac{T^3T''}{\rho}-\dfrac{T^3T'\rho'}{\rho^2}+\dfrac{3T^2(T')^2}{\rho}\right).
\end{cases}
\tag{29}
$$

Система (29) имеет три первых интеграла, которые с учетом условий при $z\to+\infty$

$$\rho|_{+\infty}=1,\quad u|_{+\infty}=0,\quad T|_{+\infty}=1,\quad T'|_{+\infty}=0 \tag{30}$$

записываются в следующем виде

$$\begin{cases} \rho(D-u) = D, \\ T\rho + \dfrac{\sigma_1}{4}T^4 = \gamma D u + \left(1 + \dfrac{\sigma_1}{4}\right), \\ \dfrac{\gamma(\gamma-1)D}{2}u^2 + (\gamma-1)\left(1+\dfrac{\sigma_1}{4}\right)u + \\ +\dfrac{\sigma_2}{4}(u-D)T^4 - DT + D\left(1+\dfrac{\sigma_2}{4}\right) = \\ = \kappa_0 \dfrac{T^3}{\rho}\dfrac{dT}{dz}. \end{cases} \tag{31}$$

Если в системе (31) при $z \to \pm\infty$ положить $dT/dz = 0$ или взять $\kappa_0 = 0$, то получаются традиционные условия Гюгонио для нетеплопроводного невязкого газа[10], которые также можно получить из интегральных законов сохранения.

Далее показывается, что условия Гюгонио при учете уравнений состояния (1), коэффициента теплопроводности (2) эквивалентны условиям Гюгонио в традиционном виде, полученным[10] для системы (27) в случае теплопроводного газа.

Для численного построения бегущих волн с помощью первых двух алгебраических соотношений системы (31) в третьем уравнении исключаются переменные ρ и u. В результате получается обыкновенное дифференциальное уравнение для температуры T как функции от z

$$\kappa_0 \frac{T^3}{\rho_\pm(T)} T' = q_\pm(T), \tag{32}$$

где функции $q_\pm(T)$, $\rho_\pm(T)$ определены на полуинтервале $(0, T_*]$ и являются двузначными

$$\begin{gathered} q_\pm(T) = \frac{\gamma(\gamma-1)D}{2}u_\pm^2(T) + (\gamma-1)\left(1+\tfrac{\sigma_1}{4}\right)u_\pm(T) - \\ -DT - \tfrac{\sigma_2}{4}[D - u_\pm(T)]T^4 + D\left(1+\tfrac{\sigma_2}{4}\right); \end{gathered} \tag{33}$$

$$\rho_\pm(T) = \frac{D}{D - u_\pm(T)}, \tag{34}$$

а функция $u_\pm(T)$ имеет вид:

$$u_\pm(T) = \frac{\gamma D^2 + \frac{\sigma_1}{4}T^4 - \left(1+\frac{\sigma_1}{4}\right) \pm \sqrt{W(T)}}{2\gamma D}, \tag{35}$$

где

$$W(T) = \left[\frac{\sigma_1}{4}T^4 - \left(\gamma D^2 + 1 + \frac{\sigma_1}{4}\right)\right]^2 - 4\gamma D^2 T.$$

Функция $W(T)$ положительна на интервале $(0; T_*]$, где $T_* > T_0 = 1$. Поэтому функции $\rho_\pm(T)$, $u_\pm(T)$, $q_\pm(T)$ определены от 0 до T_*.

Для решения дифференциального уравнения (32) принципиальное значение имеет расположение корней функции $q_{\pm}(T)$. При этом, значение $T_0 = 1$ всегда является корнем этой кривой, лежащим на нижней ветви. Причем, $q_{-}(1) = 0$, $q_{-}(T_*) = q_{+}(T_*)$ и $q_{-}(T) < q_{+}(T)$ при $0 < T < T_*$. Предельные при $z \to +\infty$ значения плотности $\rho = 1$ и скорости газа $u = 0$ принадлежат нижним ветвям соответствующих кривых $\rho_{\pm}(T)$, $u_{\pm}(T)$ при $T = 1$, поэтому нулевое значение теплового потока при $T = 1$ также принадлежит нижней ветви кривой $q_{\pm}(T)$. На рис. 3 приведена зависимость $q_{\pm}(T)$ при $D = 5$ и при следующих значениях используемых констант: $\gamma = \frac{5}{3}$; $\kappa_0 = 1,4842$; $\sigma_1 = 0,2366$ и при этом корень $T = 1$ лежит на нижней ветви, а корень $T = T_1$ – на верхней.

Рис. 3

Поскольку бегущая волна моделирует ударное воздействие на теплопроводный невязкий газ, то скорость движения D должна быть больше c_0 – скорости звука в однородном покоящемся при $z = +\infty$ нехолодном газе. При указанных выше значениях $\gamma, \kappa_0, \sigma_1$ значение $c_0 \approx 1,00757$, поэтому далее полагается $D > D_0 = c_0$. При $D > D_0$ на кривой $q_{\pm}(T)$ появляется второй корень $T = T_1 > 1$. Сначала он располагается на нижней ветви ($q_{-}(T_1) = 0$), но с ростом D он переходит на верхнюю ветвь ($q_{+}(T_1) = 0$), а затем вновь возвращается на нижнюю. В следующем параграфе показывается, что расположение корня $T = T_1$ на разных ветвях кривой $q_{\pm}(T)$ приводит к принципиально различным течениям газа: без изотермического скачка или с ним.

В **параграфе 2.2** численно строятся и анализируются бегущие волны, распространяющиеся по нехолодному фону с $T_0 > 0$. Они определяются при численном решении дифференциального уравнения (32) с начальным условием

$$T|_{z=0} = T^0, \qquad (36)$$

где значение константы T^0 должно быть выбрано в интервале $(1; T_1)$. Например, $T^0 = (1 + T_1)/2$. При этом в уравнении (32) и в зависимостях (33)–

(35) в качестве нижнего индекса всегда берется "минус", а расчет ведется от точки $z = 0$ как в сторону возрастания z, так и в сторону убывания z. Температура газа в бегущей волне определяется при численном решении задачи Коши (32), (36), после чего с помощью формул (34)–(35) определяются скорость и плотность газа в бегущей волне во всей области течения от $z = -\infty$ до $z = +\infty$.

Численными расчетами установлено, что в случае $\sigma \neq 0$, $\kappa_0 \neq 0$, $T_0 > 0$ имеется три режима бегущей волны: непрерывный переход при $D_0 < D \leq D_1 \approx 1,366$; изотермический скачок при $D_1 < D < D_2 \approx 13,675$; вновь непрерывный переход при $D > D_2$. Конкретные численные значения D_1 и D_2 приведены для указанных выше значений γ, κ_0 и σ_1.

Пусть $D_0 < D < D_1$. Тогда корень $T = T_1 > 1$, как и корень $T_0 = 1$, лежит на нижней ветви: $q_-(T_1) = 0$. Решение задачи Коши (32), (36) в этом случае непрерывно и все зависимости $T(z), u(z), \rho(z)$ монотонно убывают от значений $T = T_1$, $u = u_-(T_1)$, $\rho = \rho_-(T_1)$ при $z \to -\infty$ до значений $T = T_0$, $u = 0$, $\rho = 1$ при $z \to +\infty$.

При $D_1 < D < D_2$ корень $T = T_1$ переходит на верхнюю ветвь кривой $q_\pm(T)$: $q_+(T_1) = 0$ и возникает второй режим. В этом случае при расчете от $z = 0$ в сторону уменьшения z уже при некотором конечном значении $z = z_1$ функция $T(z)$ принимает значение $T = T_1$. В точке $z = z_1$ для величин q, ρ и u необходимо ставить условие сильного разрыва: перехода от значений $q = q_2 = q_-(T_1)$, $\rho = \rho_2 = \rho_-(T_1)$ и $u = u_2 = u_-(T_1)$ к значениям $q = q_1 = q_+(T_1)$, $\rho = \rho_1 = \rho_+(T_1)$ и $u = u_1 = u_+(T_1)$ соответственно. При этом плотность и скорость газа в точке z_1 меняются скачком, а температура в этом течении меняется непрерывно. Такие скачки в газовой динамике называются изотермическими. За изотермическим скачком все газодинамические параметры постоянны: $\rho = \rho_1$, $u = u_1$, $T = T_1$.

При дальнейшем увеличении D, то есть при $D > D_2$, корень T_1 лежит на нижней ветви; бегущая волна, как и в случае $D_0 < D < D_1$, передает размазанный ударный переход со своими значениями параметров газа при $z = -\infty$ и значениями (30) при $z = +\infty$. В третьем режиме при дальнейшем увеличении D температура и скорость газа растут неограниченно, а значение плотности за бегущей волной стремится снизу к значению $7\rho_0$, где ρ_0 – плотность газа перед бегущей волной.

Далее в параграфе проведены расчеты со значениями T_0, уменьшающимися вплоть до $T_0 = 10^{-6}$. Установлено, что при $T_0 \to 0$ значения D_0 и D_1 также стремятся к нулю. Но значение D_2 стремится к величине

$$D_{2*} = \left[\frac{(8+4s)(4+s)}{\sigma_1 \gamma^3}\right]^{1/6} > 0, \quad s = \sqrt{\frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}}.$$

Следовательно, в пределе при $T_0 \to 0$ три режима за счет исчезновения первого режима непрерывно перейдут в два режима для бегущих волн, распространяющихся по холодному фону[10].

В **главе 3** численно моделируются плоскосимметричные тепловые волны, распространяющиеся по холодному фону. Рассматриваются такие тепловые волны, фронт которых движется либо с постоянной скоростью, либо ускоренно.

Численное моделирование осуществляется двумя способами:

1. С использованием приближенных аналитических решений, задаваемых конечными отрезками рядов, построенных в параграфе 1.1.

2. Численными расчетами полей течений с помощью одной разностной схемы.

Вначале приближенно определяется область применимости рядов, построенных в параграфе 1.1. Доказанные теоремы обеспечивают сходимость этих рядов в окрестности точки $(\tau = 0, z = 0)$. Метод мажорант, с помощью которого доказаны эти теоремы, позволяет получить оценки радиуса сходимости рядов. Однако, как показывает практика, эти оценки являются заниженными. Для выявления реальной области сходимости а, следовательно, и области применимости построенных рядов проводится сравнение начальных отрезков рядов с точным решением. Точное решение получается в плоскосимметричном случае, когда тепловая волна распространяется с постоянной скоростью D, то есть $x = Dt$. В этом случае тепловая волна зависит только от одной переменной $z = x - Dt$ и является бегущей волной. Она строится не только с помощью бесконечных рядов из параграфа 1.1, но и численно при решении обыкновенного дифференциального уравнения. Но в отличие от параграфа 2.2, у уравнения (32) в данном случае имеется особенность на фронте тепловой волны при $T = 0$. С помощью рядов эта особенность раскрыта явно в аналитическом виде, что позволяет поставить начальные данные не в особой точке. Численное решение задачи Коши, поставленной не в особой точке, для обыкновенного дифференциального уравнения в современной научной практике считается построением точного решения. Сравнение численно построенного решения с начальными отрезками рядов дало возможность оценить область применимости используемых отрезков рядов.

Далее в главе 3 находятся граничные условия, с помощью которых моделируются тепловые волны с различными заданными законами движения фронта. Этими условиями являются либо закон движения сжимающего поршня и значения газодинамических параметров на нем, либо значения параметров газа на прямой $x = 0$. Чтобы получить закон движения сжимающего непроницаемого поршня решается обыкновенное дифференциальное уравнение, в правой части которого стоят конечные отрезки рядов. Решение этого уравнения описывает траекторию движения конкретной частицы газа. Кроме того, с помощью начальных отрезков рядов при разных законах движения фронта на прямой $x = 0$ восстанавливаются значения всех газодинамических параметров. Эти граничные условия также порождают данную тепловую волну. Построенные отрезки рядов задают поля течений во всей рассматриваемой области в двух случаях: от фронта тепловой волны до либо восстановленной траектории сжимающего поршня; либо до прямой $x = 0$.

При численном моделировании тепловых волн с помощью одной разностной схемы, используется следующий подход.

Во-первых, начальные данные поставлены на фронте $x = a(t)$, то есть на прямой $z = 0$. Но поскольку на прямой $z = 0$ имеют место бесконечные градиенты газодинамических параметров, то от нее отступают на некоторую прямую $z = z_0 < 0$ ($|z_0|$ мал). Именно на этой прямой $z = z_0$ и ставятся граничные условия для всех параметров газа, которые, в свою очередь, вычисляются с помощью конечных отрезков рядов.

Во-вторых, от прямой $z = z_0$ расчет ведется в сторону убывания переменной z, то есть в область определения тепловой волны. Для того чтобы начать расчет, на прямой $t = 0$ с помощью конечных отрезков рядов ставятся начальные условия для всех параметров газа.

Расчеты проводятся для тепловых волн с заданным фронтом $a(t) = t + \lambda t^2$ ($\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, 10$).

Для задачи о моделировании тепловой волны, когда фронт движется с постоянной скоростью $a'(t) = 1$ ($\lambda = 0$), имеется точное решение – бегущая по холодному фону тепловая волна. Бегущая по холодному фону тепловая волна с $a(t) = t$ позволяет протестировать как используемую разностную схему, так и приближенное решение, построенное с помощью конечных отрезков рядов.

В случае ускоренного движения фронта: $a(t) = t + \lambda t^2$, $a'(t) = 1 + 2\lambda t$ ($\lambda = \frac{1}{2}, 1, 10$) – в главе производится сравнение приближенного решения, полученного с помощью конечных отрезков рядов, с численным решением, построенным с помощью разностной схемы.

Глава содержит три параграфа.

В **параграфе 3.1** используются бегущие волны для оценки области применимости построенных аналитических решений в случае закона движения фронта тепловой волны вида $a(t) = Dt$.

Аналитические решения строятся в виде ряда

$$\mathbf{W}\left(\tau,\xi\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{W}_k\left(\tau\right)\frac{\xi^k}{k!},\quad \mathbf{W}_k\left(\tau\right)=\left.\frac{\partial^k\mathbf{W}}{\partial\xi^k}\right|_{\xi=0},\quad \mathbf{W}=\left(\rho,u,T\right), \qquad (37)$$

где $\xi=\sqrt[3]{z}$, $z=x-a(t)$. В данном случае $\xi=\sqrt[3]{x-Dt}$ и, поскольку $a'(t)=D=\mathrm{const}$, коэффициенты $\mathbf{W}_k\left(\tau\right)$ ряда (37) являются константами, то есть не зависят от τ: $\mathbf{W}_k\left(\tau\right)=\mathbf{W}_k^0$.

Тогда начальные отрезки ряда (37) имеют такой вид

$$\begin{gathered}
\rho(t,x)\approx 1-\frac{1}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0 D^5}}\sqrt[3]{x-Dt},\\
u(t,x)\approx -\frac{1}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0 D^2}}\sqrt[3]{x-Dt},\\
T(t,x)\approx -\sqrt[3]{\frac{3D}{\kappa_0}}\sqrt[3]{x-Dt},
\end{gathered}\qquad (38)$$

если учтены слагаемые с ξ и следующий вид

$$\begin{gathered}
\rho(t,x)\approx 1-\frac{1}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0 D^5}}\sqrt[3]{x-Dt}+\frac{1}{\gamma^2}\sqrt[3]{\frac{9}{\kappa_0^2 D^{10}}}\sqrt[3]{(x-Dt)^2},\\
u(t,x)\approx -\frac{1}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0 D^2}}\sqrt[3]{x-Dt}+\frac{1}{2\gamma^2}\sqrt[3]{\frac{9}{\kappa_0^2 D^7}}\sqrt[3]{(x-Dt)^2},\\
T(t,x)\approx -\sqrt[3]{\frac{3D}{\kappa_0}}\sqrt[3]{x-Dt}-\frac{1}{2\gamma}\sqrt[3]{\frac{9}{\kappa_0^2 D^4}}\sqrt[3]{(x-Dt)^2},
\end{gathered}\qquad (39)$$

если учтены слагаемые по ξ^2 включительно.

Бегущие волны описываются решениями СОДУ (29), приведенной в гл. 2.

В параграфе 2.1 решение этой СОДУ (29) с помощью нахождения первых интегралов сведено к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения (32). Условия непрерывного премыкания бегущей тепловой волны к холодному однородному фону имеют вид

$$\rho(\tau,z)|_{z=0}=1,\quad u(\tau,z)|_{z=0}=0,\quad T(\tau,z)|_{z=0}=0. \qquad (40)$$

Но тогда для уравнения (32) точка $z=0$ является особой (коэффициент перед производной равен нулю). Поэтому при численном решении уравнения (32) делается отступ влево в точку $z_0<0$, в которой по формулам (39) вычисляются значения температуры газа. После этого расчетом от z_0 в сторону убывания z производится численное построение решения уравнения (32) с полученным начальным данным в точке z_0. Это решение в последующем называется точным решением.

На рис. 4 представлены следующие графики функции $T = T(z)$: 1 – точное решение, то есть численное решение задачи Коши с данными в точке $z = z_0$, 2 и 3 – приближенные решения, полученные по формулам (38) и (39) соответственно.

Рис. 4

Для определения границ областей сходимости рядов (37) при $a(t) = Dt$ сравнивается точное решение с конечными суммами (39). Будем полагать, что отрезок ряда с тремя членами хорошо передает точное решение, если выполняется следующее условие

$$\frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{2} \mathbf{W}_k^0 \cdot \frac{(\sqrt[3]{z})^k}{k!} - \mathbf{W}_{\text{точ}}\right|}{|\mathbf{W}_{\text{точ}}|} \leq \delta. \qquad (41)$$

В диссертации берется 5%-ная величина относительной погрешности, то есть $\delta = 0,05$. С помощью этого критерия определяются границы применимости приближенного решения, то есть определяется значение r такое, что при $|z| \leq r$ выполняется неравенство (41).

В случае произвольного закона движения тепловой волны $x = a(t)$ ряд (37) зависит от двух независимых переменных τ, ξ. В этом общем случае областью сходимости ряда (37) является некоторая окрестность точки $(\tau = 0, \xi = 0)$. В рассматриваемом случае: $a(t) = Dt$ – ряд (37) зависит только от одной переменной z и сходится в окрестности точки $z = 0$, которая задается неравенством $|z| \leq r$. В физическом пространстве переменных x, t последнее неравенство задает следующую неограниченную полосу $\{(x,t): Dt - r \leq x \leq r + Dt\}$ (см. рис. 5*а*).

Рис. 5a *Рис. 5b*

На рис. 5b показана область восстановления составного течения в физическом пространстве. В правой полуполосе $x > Dt$ располагается однородный холодный покоящийся газ. В левой полуполосе $x < Dt$ располагается построенное приближенное течение. На фронте тепловой волны $x = Dt$ это течение непрерывно стыкуется с однородным холодным покоящимся газом.

Для сравнения численно построенного точного решения и приближенного решения (39) в диссертации приведены соответствующие таблицы и графики.

В **параграфе 3.2** проводится приближенное построение закона движения сжимающего поршня и краевого режима на прямой $x = 0$ с помощью конечных отрезков рядов, а также определение всех газодинамических параметров на линиях $x = 0$ и $x = x_p(t)$ (траектория движения поршня). В качестве закона движения фронта тепловой волны берутся функции
$a(t) = t$ и $a(t) = t + \lambda t^2$, где $\lambda = \frac{1}{2}, 1, 10$.

Исследование начинается с построения траектории движения поршня $x = x_p(t)$, порождающего данную тепловую волну. За траекторию движения непроницаемого поршня принимается траектория движения частицы газа, которая в начальный момент времени при $t = 0$ находится в точке $x = 0$, то есть в точке, из которой начинают движения сжимающий поршень и фронт движения тепловой волны. Для этого ставится задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = u(t,x), \quad x|_{t=0} = 0, \tag{42}$$

где в качестве $u(t,x)$ берется ряд (37) при заданном фронте в виде $x = a(t)$.

Поставленная задача (42) решается с использованием в правой части уравнения (42) вместо ряда (37) его конечного отрезка:

$$u(t,x) = -\frac{1}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0[a'(t)]^2}}\sqrt[3]{x-a(t)} + \frac{1}{2\gamma^2}\sqrt[3]{\frac{9}{\kappa_0^2[a'(t)]^7}}\sqrt[3]{(x-a(t))^2}. \qquad (43)$$

В частном случае при $a(t) = t$ траектория движения поршня найдена в виде следующей неявно заданной функции

$$t = \frac{6}{b^2}\sqrt[3]{x-t} - \frac{6}{b^3}\ln\left|\frac{2}{b^2\sqrt[3]{(x-t)^2} + 2b\sqrt[3]{x-t} - 2}\right| +$$

$$+\frac{4\sqrt{3}}{b^3}\ln\left|\frac{(b\sqrt[3]{x-t} + 1 - \sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(b\sqrt[3]{x-t} + 1 + \sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\right|, \qquad b = -\frac{1}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0}}.$$

Кроме этого, задача Коши с правой частью (43) решается численно при упомянутых выше функциях $a(t)$.

Найденная зависимость $x = x_p(t)$ подставляется в формулы (43), (44) и в конечные отрезки рядов, задающих плотность и температуру:

$$\begin{aligned} \rho(t,x)|_{x=x_p(t)} &= 1 - \frac{1}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0[a'(t)]^5}}\sqrt[3]{x_p(t)-a(t)} + \\ &+ \frac{1}{\gamma^2}\sqrt[3]{\frac{9}{\kappa_0^2[a'(t)]^{10}}}\sqrt[3]{(x_p(t)-a(t))^2}, \\ T(t,x)|_{x=x_p(t)} &= -\sqrt[3]{\frac{3[a'(t)]}{\kappa_0}}\sqrt[3]{x_p(t)-a(t)} - \\ &- \frac{1}{2\gamma}\sqrt[3]{\frac{9}{\kappa_0^2[a'(t)]^4}}\sqrt[3]{(x_p(t)-a(t))^2}. \end{aligned} \qquad (44)$$

Тем самым, находятся значения газодинамических параметров на поршне, то есть определяются краевые условия, порождающие тепловую волну с заданным фронтом.

В диссертации в виде таблиц и графиков представлены результаты расчетов траекторий движения сжимающего поршня и распределение всех газодинамических параметров на нем при заданных функциях $x = a(t)$.

Для выяснения вопроса о том, какой краевой режим надо задавать на прямой $x = 0$, чтобы инициировать тепловую волну с заданным законом движения фронта, определяются параметры газа при $x = 0$ с помощью отрезков (43), (44).

В случае $a(t) = t$ функция $T(t,x)|_{x=0} = f(t)$, задающая краевой температурный режим на прямой $x = 0$ имеет вид

$$T(t,0) = \sqrt[3]{t}(c + d\sqrt[3]{t}), \quad c, d - \text{const},$$

а, кроме того, скорость и плотность газа на прямой $x = 0$ задаются своими функциями от времени:

$$u(t,0) = \sqrt[3]{t}(p + q\sqrt[3]{t}); \quad \rho(t,0) = 1 + \sqrt[3]{t}(p + e\sqrt[3]{t}), \tag{45}$$

$p, q, e - \text{const}$.

В случае $a(t) = t + \lambda t^2$ функция $T(t,x)|_{x=0} = f(t)$, задающая краевой температурный режим при $x = 0$, имеет вид

$$T(t,0) = \sqrt[3]{t}\left(p\sqrt[3]{(1+2\lambda t)(1+\lambda t)} + q\sqrt[3]{\frac{(1+\lambda t)^2}{(1+2\lambda t)^4}}\sqrt[3]{t}\right),$$

а скорость и плотность газа на прямой $x = 0$ такие:

$$\rho(t,0) = 1 + \frac{\sqrt[3]{t}}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0[1+2\lambda t]^5}}\sqrt[3]{1+\lambda t} + \frac{\sqrt[3]{t^2}}{\gamma^2}\sqrt[3]{\frac{9}{\kappa_0^2[1+2\lambda t]^{10}}}\sqrt[3]{[1+\lambda t]^2},$$

$$u(t,0) = \frac{\sqrt[3]{t}}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{3}{\kappa_0[1+2\lambda t]^2}}\sqrt[3]{1+\lambda t} + \frac{\sqrt[3]{t^2}}{2\gamma^2}\sqrt[3]{\frac{9}{\kappa_0^2[1+2\lambda t]^{7}}}\sqrt[3]{[1+\lambda t]^2}. \tag{46}$$

Тем самым получены краевые режимы на прямой $x = 0$, реализация которых порождает тепловую волну с заданным фронтом и определены особенности этих краевых режимов в момент времени $t = 0$. Эта информация является рекомендацией физикам для постановки соответствующих физических экспериментов. Но при этом надо иметь в виду, что из формул (45), (46) следует, что через прямую $x = 0$ осуществляется приток газа.

В **параграфе 3.3** проводится приближенное построение полей течений газа во всей рассматриваемой области в двух случаях: 1) от фронта тепловой волны до траектории движения сжимающего поршня $x = x_p(t)$; 2) от фронта тепловой волны до прямой $x = 0$. В обоих случаях в качестве закона движения фронта тепловой волны берутся функции $a(t) = t$ и $a(t) = t + \lambda t^2$, где $\lambda = \frac{1}{2}, 1, 10$.

Область применимости построенных приближенных решений определена в параграфе 3.1 и имеет вид полуполосы $\{(x,t)\colon Dt - r \le x \le Dt\}$ (см. рис. 5*b*), определяемой заданным законом движения фронта тепловой волны $x = Dt$.

В данном параграфе производится уточнение области применимости построенных приближенных решений при учете краевых режимов, полученных в предыдущем параграфе. Поскольку краевые режимы начинают действовать с момента времени $t = 0$, то область применимости ограничена снизу этим моментом времени $t = 0$. Сверху область применимости ограничена некоторым моментом времени $t = t_* > 0$, когда пересекаются линии краевых режимов с левой границей указанной полуполосы.

В первом случае t_* – это момент времени, когда траектория движения поршня $x = x_p(t)$ пересекает границу полосы сходимости (см. рис. 6), во втором случае $t_* = r/D$ – момент времени, когда граница полосы сходимости пересекает прямую $x = 0$ (см. рис. 7).

На рис. 6 показана область, где определяется течение газа в первом случае, когда сжимающий поршень $x = x_p(t)$ порождает тепловую волну с заданным законом движения фронта $x = Dt$.

Рис. 6

Область, в которой приближенно восстанавливаются значения газодинамических параметров во втором случае, показана на рис. 7. В этом случае краевой режим на прямой $x = 0$ также порождает тепловую волну с заданными законами движения фронта $x = Dt$.

Рис. 7

Далее в параграфе предложена одна разностная схема для системы (1.7), позволяющая при заданном фронте тепловой волны рассчитать поля течений.

Во-первых, начальные данные поставлены на фронте $x = a(t)$, то есть на прямой $z = 0$. Но поскольку на прямой $z = 0$ имеют место бесконечные градиенты газодинамических параметров, то от нее отступают на некоторую прямую $z = z_0 < 0$ ($|z_0|$ мал). Именно на этой прямой $z = z_0$ и ставятся граничные условия для всех параметров газа, которые, в свою очередь, вычисляются с помощью конечных отрезков рядов.

Во-вторых, от прямой $z = z_0$ расчет ведется в сторону убывания переменной z, то есть в область определения тепловой волны. Для того чтобы начать расчет, на прямой $t = 0$ с помощью конечных отрезков рядов ставятся начальные условия для всех параметров газа.

Расчеты проводятся для тепловых волн с заданным фронтом $a(t) = t + \lambda t^2$ ($\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, 10$).

Для задачи о моделировании тепловой волны, когда фронт движется с постоянной скоростью $a'(t) = 1$ ($\lambda = 0$), имеется точное решение – бегущая по холодному фону тепловая волна. Бегущая по холодному фону тепловая волна с $a(t) = t$ позволяет протестировать как используемую разностную схему, так и приближенное решение, построенное с помощью конечных отрезков рядов.

В случае ускоренного движения фронта: $a(t) = t + \lambda t^2$, $a'(t) = 1 + 2\lambda t$ ($\lambda = \frac{1}{2}, 1, 10$) – в главе производится сравнение приближенного решения, полученного с помощью конечных отрезков рядов, с численным решением, построенным с помощью разностной схемы.

На основании расчетов можно сделать следующий вывод: для проведения надежных расчетов по разностной схеме надо с помощью аналитических решений отступать от фронта тепловой волны как можно дальше.

Результаты приближенного построения течений теплопроводного невязкого газа представлены в диссертации в виде таблиц и графиков.

Публикации автора по теме диссертации

1. Баутин С.П., Садов А.П. Бегущая волна при учете равновесного излучения // Прикладная механика и техническая физика.–2006.–Т.47.–№4.–С. 15–25.

2. Баутин С.П., Садов А.П. Одномерная тепловая волна в невязком газе // Вычислительные технологии. 2006.– Т. 11.–№ 5.–С 11–20.

3. Баутин С.П., Садов А.П. Численное исследование бегущих волн в теплопроводном невязком газе // Проблемы прикладной математики: Сборник научных трудов.– Екатеринбург: УрГУПС.– №41(124).–В 2-х т.: Т.1.–2005-2006. С. 22–43.

4. Садов А.П. Плоскосимметричная тепловая волна со специальным краевым температурным режимом // Проблемы прикладной математики и механики: Сборник научных трудов. – Екатеринбург: УрГУПС. – №58(141)/2м. – В 2-х т.: Т.1.– 2007. С. 204–224.

5. Садов А.П. Численно–аналитическое моделирование одномерных тепловых волн // Проблемы прикладной математики и механики: Сборник научных трудов. –Екатеринбург: УрГУПС. –№58(141)/2м.–В 2-х т.: Т.1.–2007.–С. 162–203.

6. Садов А.П. Цилиндрически- и сферически-симметричная тепловая волна в невязком газе. Деп. в ВИНИТИ.–№ 1533-В2006.–2006.–26 с.

7. Садов А.П. Тепловая волна в невязком газе // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й регион. молодежн. конференц. Екатеринбург: УрО РАН.–2006.– С. 241–247.

8. Садов А.П. Плоскосимметричная тепловая волна со специальным краевым температурным режимом // Молодые ученые – транспорту-2007: Сборник научных трудов, посвященный 170-летию российских железных дорог.– Екатеринбург: УрГУПС.–2007.–С. 502–519.

9. Баутин С.П., Николаев Ю.В., Рощупкин А.В., Чернышов Ю.Ю., Ягупов С.А. Математическое моделирование безударного сильного сжатия газа // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докладов. – Нижний Новгород.–Т.2.–2006.–С. 25–26.

10. Баутин С.П., Чернышов Ю.Ю., Садов А.П. Особенности течений теплопроводного невязкого газа. Тезисы междунар. конф. "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике". Новосибирск, 2005.– С. 24–25.

11. Баутин С.П., Чернышов Ю.Ю., Садов А.П. // VII Забабахинские научные чтения: Тезисы докладов междунар. конф.–Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2005.–С. 25–26.

12. Садов А.П. Тепловая волна при учете равновесного излучения // VIII Забабахинские научные чтения: Тезисы докладов междунар. конф.– Снежинск.–2007.–С. 229.

13. Садов А.П. Одномерная тепловая волна в невязком газе // Аналитические методы в газовой динамике "САМГАД-2006": Тезисы докладов 21-й всерос. конф.–Санкт-Петербург.–2006.– С. 73–74.

14. Садов А.П. Цилиндрически- и сферически-симметричная тепловая волна в невязком газе // Устойчивость, управление и моделирование динамических систем: Материалы Международной научной конференции, посвящ. 75-летию со дня рожд. И.Я. Каца.– Екатеринбург: УрГУПС. – №54(137). – 2006. – С. 82.